**Занятие 1.**

**Основные понятия теории вероятности**.

**1. Вероятностное пространство**

1.1. Конечное *пространство элементарных событий* (*ПЭС*) – конечное множество; его элементы называются *элементарными событиями* *(э.с.)*.

Каждому э.с. приписана *вероятность* – число между 0 и 1.

**Сумма вероятностей всех э.с. равна 1.**

Рассматривая конкретную задачу мы фиксируем определенное ПЭС и работаем только с ним.

**Вероятностное пространство = ПЭС + вероятности э.с.**

Пример 1. Монетка. Состояния: {Oрел, Решка}. Вероятности:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Состояния** | ***Орел*** | ***Решка*** |
| **Вероятности** | 0.5 | 0.5 |

Пример 2. Кубик.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Состояния** | ***1*** | ***2*** | ***3*** | ***4*** | ***5*** | ***6*** |
| **Вероятности** | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 |

Пример 3. Две монетки.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **2-я** |  |  |  |  | **2-я** |  |  |
| **1-я** |  | ***Орел*** | ***Решка*** |  | **1-я** |  | ***Орел*** | ***Решка*** |
|  | ***Орел*** | ОО | ОР |  |  | ***Орел*** | 1/4 | 1/4 |
|  | ***Решка*** | РО | РР |  |  | ***Решка*** | 1/4 | 1/4 |
|  | Состояния | | |  |  | Вероятности | | |

Вероятность того, что на 1-й монетке орел: ¼ +¼ = ½

Пример 4. Гнутая монетка.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Состояния** | ***Орел*** | ***Решка*** |
| **Вероятности** | 0.9 | 0.1 |

*1.2. Событие –* подмножество ПЭС. *Вероятность* события *-*  сумма вероятностей входящих в него э.с.

Замечание. Аналоги понятия вероятность – мера, площадь, объем, масса, цена.

Пример 5. Две странные монетки.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **2-я** |  |  |  |  | **2-я** |  |  |
| **1-я** |  | ***Орел*** | ***Решка*** |  | **1-я** |  | ***Орел*** | ***Решка*** |
|  | ***Орел*** | ОО | ОР |  |  | ***Орел*** | 0.3 | 0.1 |
|  | ***Решка*** | РО | РР |  |  | ***Решка*** | 0.5 | 0.1 |
|  | Состояния | | |  |  | Вероятности | | |

Вероятность того, что на 1-й монетке орел: 0.3+0.5 = 0.4

Вероятность того, что на 1-й монетке решка: 0.1+0.1 = 0.2

Вероятность того, что на 2-й монетке орел: 0.3+0.5 = 0.8

Вероятность того, что на 1-й монетке решка: 0.1+0.1 = 0.2

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **2-я** |  |  |  |
| **1-я** |  | ***Орел*** | ***Решка*** | **1-я м-ка** |
|  | ***Орел*** | 0,30 | 0,10 | **0,40** |
|  | ***Решка*** | 0,50 | 0,10 | **0,60** |
|  | **2-я м-ка** | **0,80** | **0,20** |  |

*1.3. Реализация вероятностного пространства:*

*(иногда по нашему хотению, иногда независимо от нас) происходит одно из возможных событий.*

***Если независимо друг от друга*** *(что это значит – поговорим позже)* ***провести много реализаций, то доля каждого события будет пропорциональна его вероятности****.*

Примеры: бросаем монетку, бросаем кубик, вызываем датчик случайных чисел.

Вокруг нас (с хорошей точностью) существуют реализации случайных величин. Это нужно учитывать и использовать.

Иногда вместо «элементарное событие» говорят: *исход* или *исход испытания.*

**2. Случайная величина**

2.1. *Случайная величина* (с.в.) – это числовая функция, определенная на элементарных событиях. Т.е. каждому э.с. сопоставляется некоторое число.

Можно представить себе, что мы играем в азартную игру. Значение с.в. определяет наш выигрыш (при отрицательном значении – проигрыш) при наступлении конкретного события.

Примеры.

1. Монетка А Монетка Б

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Состояния** | ***Орел*** | ***Решка*** |  | **Состояния** | ***Орел*** | ***Решка*** |
| **Вероятности** | 1/2 | 1/2 |  | **Вероятности** | 1/2 | 1/2 |
| **Значение с.в.** | 0 | 1 |  | **Значение с.в.** | -5 | 1 |

1. Кубик А

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Состояния** | ***1*** | ***2*** | ***3*** | ***4*** | ***5*** | ***6*** |
| **Вероятности** | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 |
| **Значение с.в.** | ***1*** | ***2*** | ***3*** | ***4*** | ***5*** | ***6*** |

Кубик Б

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Состояния** | ***1*** | ***2*** | ***3*** | ***4*** | ***5*** | ***6*** |
| **Вероятности** | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 |
| **Значение с.в.** | ***-1*** | ***2*** | ***0*** | ***0*** | ***5*** | ***-6*** |

* 1. Среднее значение (математическое ожидание)

Если все исходы равновероятны, то математическое ожидание с.в. – это среднее арифметическое ее возможных значений.

Если не равновероятны, то нужно учитывать вероятности.

Пусть X – случайная величина; вероятностное пространство содержит N э.с.; pk - вероятность k-го э.с.; Xk – значение с.в. на нем (k = 1,…, N). Тогда

M(X) = X1\*p1 + X2\*p2 + … + XN\*pN (\*)

Пример. НЕ НАПИСАН ☹

Если с.в. принимает одно и то же значение на нескольких э.с., то в формуле (\*) удобно сделать – группировку – собрать вместе все слагаемые, соответствующие одному и тому же значению с.в.

Получим такую формулу.

Пусть случайная величина X принимает R различных значений: Z1, Z2, …, ZR

Пусть qk – это вероятность того, что с.в. X принимает значение Xk, т.е. сумма вероятностей тех э.с., на которых с.в. X принимает значение Zk (k = 1, …, R). Тогда:

M(X) = Z1\*q1 + Z2\*p2 + … + ZR\*pR (\*\*)

Пример. НЕ НАПИСАН ☹

Т.к. в последовательности реализаций вероятностного пространства доля каждого исхода примерно равна его вероятности, то **среднее арифметическое соответствующих значений с.в. примерно равно математическому ожиданию с.в.**

Таблица, в которой перечислены все возможные значения с.в. и вероятности, с которыми принимаются эти значения, называется ***законом распределения с.в.***

**Чтобы узнать м.о. с.в. достаточно знать ее закон распределения.**

**Про вероятностное пространство можно ничего не знать.**

1. **Независимые события**

*Продолжение следует*